Математика Л-230911 18.09.2023

Урок № 78

Тема; Параллелепипед, куб. Сечение куба, параллелепипеда

Срок сдачи работ до 19.01.23

Перечень вопросов, рассматриваемых в теме

понятие тетраэдра;

понятие параллелепипеда;

свойства ребер, граней, диагоналей параллелепипеда;

определение сечения в фигуре;

метод следа.

Глоссарий по теме

Тетраэдр – это многогранник, состоящий из плоскости треугольника и точки не лежащий в этой плоскости, трех отрезков соединяющих эту точку с вершинами основания треугольника.

Четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, называется параллелограммом.

Отрезок, соединяющий противоположные вершины, называется диагональю параллелепипеда.

Сечением поверхности геометрических тел называется – плоская фигура, полученная в результате пересечения тела плоскостью и содержащая точки, принадлежащие как поверхности тела, так и секущей плоскости.

Основная литература:

Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Учебник Геометрия 10-11 кл.– М.: Просвещение, 2014.

Дополнительная литература:

Зив Б.Г. Дидактические материалы Геометрия 10 кл.– М.: Просвещение, 2014.

Глазков Ю.А., Юдина И.И., Бутузов В.Ф. Рабочая тетрадь Геометрия 10 кл.-М.: Просвещение, 2013.

Открытый электронный ресурс:

Решу ЕГЭ. Открытый образовательный портал. https://ege.sdamgia.ru

Теоретический материал для самостоятельного изучения

В дельнейшем несколько уроков нашего курса будет посвящены многогранникам- поверхностям геометрических тел, составленным из многоугольников. Но до более подробного изучения многогранников мы познакомимся с двумя из них- тетраэдром и параллелепипедом. Нам данные тела дадут возможность проиллюстрировать понятия, связанные со взаимным расположением прямых и плоскостей.

Давайте вспомним, что мы понимали под многоугольником в планиметрии. Многоугольник мы рассматривали либо как замкнутую линию без самопересечений, либо как часть плоскости, ограниченную этой линией, включая ее саму.

Мы будем использовать второе толкование многоугольника при рассмотрении поверхностей и тел в пространстве. При таком толковании любой многоугольник в пространстве представляет собой плоскую поверхность.

Давайте рассмотрим изображенную фигуру и ответим на несколько вопросов.

Итак, поверхность данной фигуры состоит из четырёх треугольников DAB, DBC, DAC и ABC.

Тетраэдр состоит:

из вершин- их у него 4- A, B, C, D;

из ребер- их у него 6- AB, BC, AC, AD, BD, CD;

из граней- их у него 4- треугольники ΔABC, ΔDAC, ΔDBC, ΔDAB.

Мы с вами выяснили из элементов состоит наша фигура тетраэдр. Теперь сформулируем определение.

Определение. Тетраэдр – это многогранник, состоящий из плоскости треугольника и точки не лежащий в этой плоскости, трех отрезков соединяющих эту точку с вершинами основания треугольника.

Говорят, что рёбра AD и BC, AB и CD, и т.д.- противоположные.

Считается $\triangle ABC$ - основание, остальные грани - боковые.

Изображается тетраэдр обычно так (рис. 1).

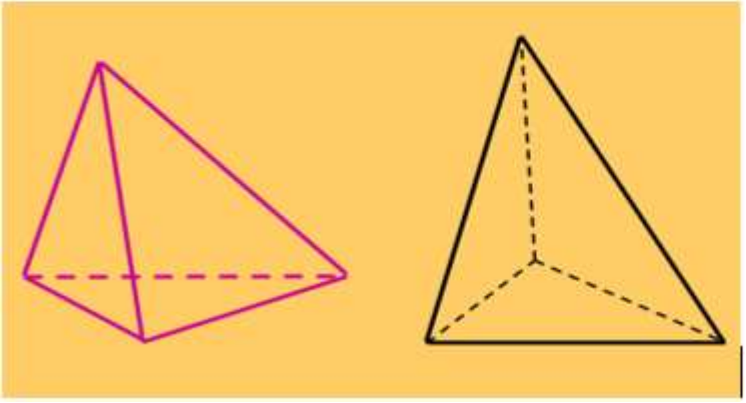


Рисунок 1 – изображение тетраэдра.

Математика, в частности геометрия, является мощнейшим инструментом в познании мира. Различные геометрические формы находят свое практическое приспособление в различных областях знания: архитектуре, скульптуре, живописи. И тетраэдр тому доказательство. Так же мы можем наблюдать тетраэдр в повседневной жизни (рис. 2).

Форма пакета молока	Архитектурные решения	Солнечные панели
		

Рисунок 2 - тетраэдр в повседневной жизни

Параллелепипед.

Прежде чем начать изучать параллелепипед вспомним определение параллелограмма и его свойства.

Определение. Четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, называется параллелограммом (рис. 3).

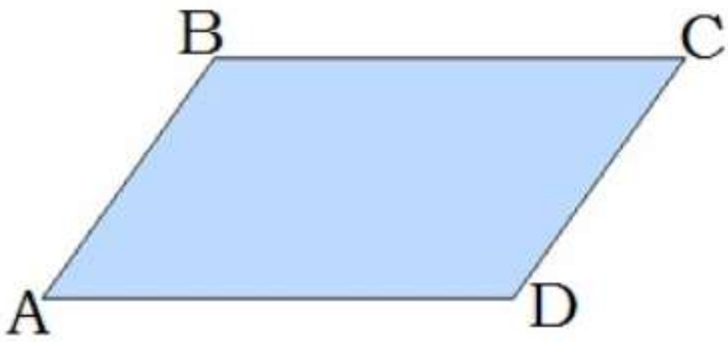
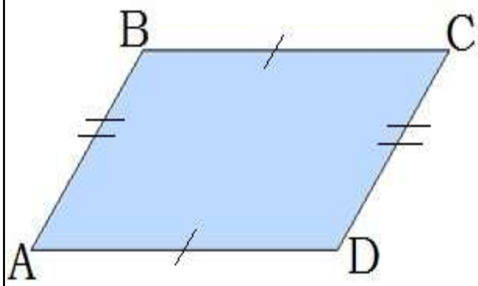
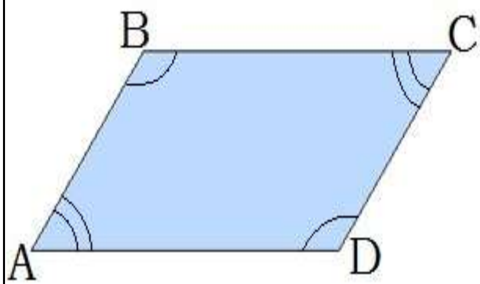
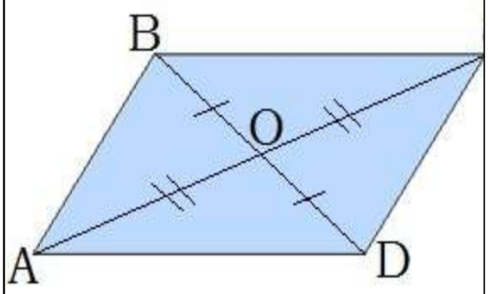
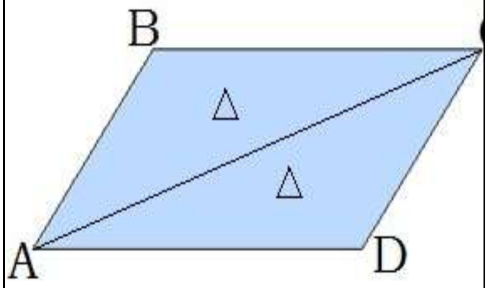
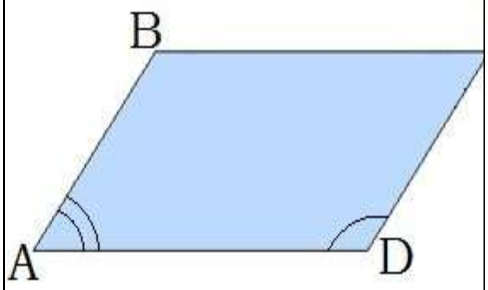
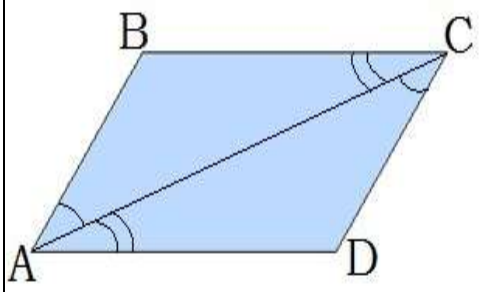


Рисунок 3 – параллелограмм

Свойства параллелограмма

1. Противоположные стороны параллелограмма равны: AB=DC, BC=AD	
2. Противоположные углы параллелограмма равны: ∟A=∟C, ∟B=∟D	

3. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам: BO=OD, AO=OC	
1. Диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника: треугольники ABC и CDA равны.	
1. Сумма углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна 180^0: ∟A+∟D =180°	
6. Накрест лежащие углы при диагонали равны: ∟BAC=∟ACD, ∟BCA=∟CAD	

А теперь перейдем к параллелепипеду.

Рассмотрим два равных параллелограмма ABCD и $A_1B_1C_1D_1$, расположенных в параллельных плоскостях так, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 параллельны.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

Давайте рассмотрим изображенную фигуру (рис. 4).

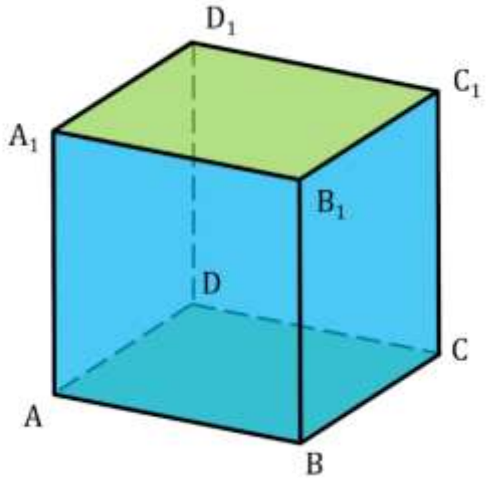


Рисунок 4 – параллелепипед и его диагонали

$ABCDA_1B_1C_1D_1$: поверхность, составленная из двух **равных параллелограммов** ABCD и $A_1B_1C_1D_1$, лежащих в параллельных плоскостях и **четырёх параллелограммов**.

Все параллелограммы - **грани**, их стороны - **рёбра**, их вершины - **вершины параллелепипеда**.

Считается: ABCD и $A_1B_1C_1D_1$ - **основания**, остальные грани - **боковые**.

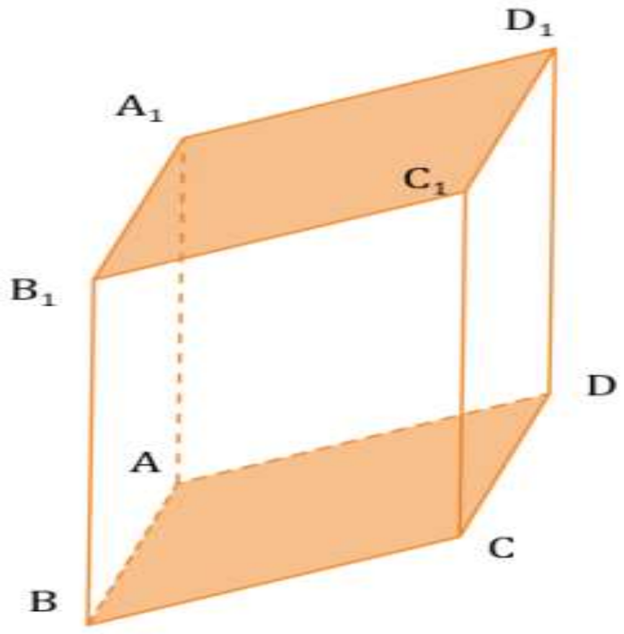
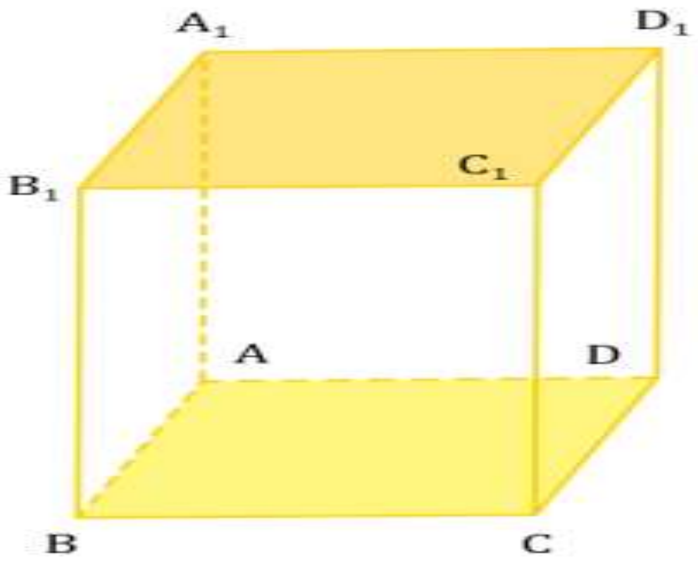
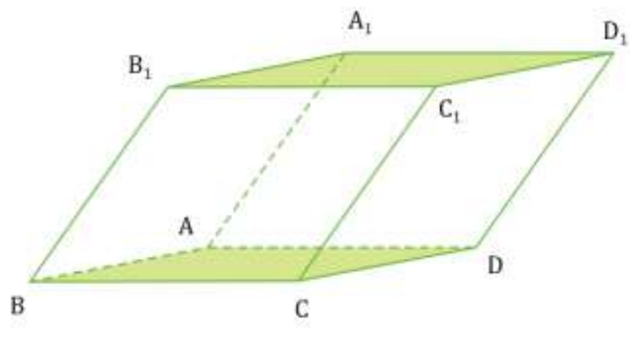
Определение. Отрезок, соединяющий противоположные вершины, называется диагональю параллелепипеда: A_1C, D_1B, AC_1, DB_1.

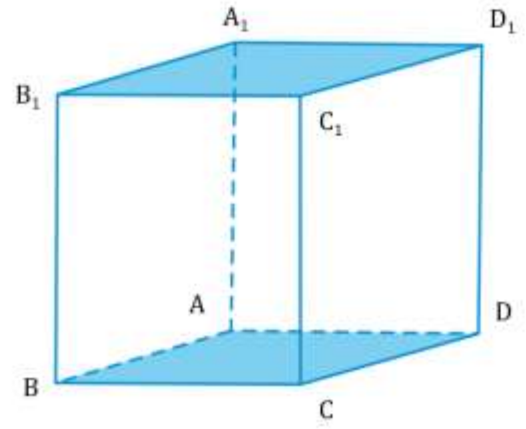
Параллелепипед – слово греческого происхождения, параллел – идущий рядом, епипед – плоскость.

Определение. Параллелепипед- это шестигранник с параллельными и равными противоположными гранями.

Следует отметить, что многоугольник в пространстве представляет собой плоскую поверхность, а тетраэдр и параллелепипед – поверхности, составленные из плоских поверхностей (соответственно треугольников и параллелограммов).

Способы изображения параллелепипеда

Параллелепипед, в основании которого лежит ромб	
Параллелепипед, в основании которого лежит квадрат	
Параллелепипед, в основании которого лежит прямоугольник или параллелограмм	

Параллелепипед, у которого все грани — равные квадраты	

Можно сделать вывод, что параллелепипеды делятся на (рис. 5)

Рисунок 5 – виды параллелепипедов

Свойства параллелепипеда

Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.

Все четыре диагонали пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

Доказательство 1

В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$грани BB_1C_1C и AA_1D_1D параллельны (рис. 6), потому что две пересекающиеся прямые BB_1 и B_1C_1 одной грани параллельны двум пересекающимся прямым AA_1 и A_1D_1 другой; эти грани и равны, так как $B_1C_1 = A_1D_1$, $B_1B= A_1A$ (как противоположные стороны параллелограммов) и $\angle BB_1C_1= \angle AA_1D_1$.

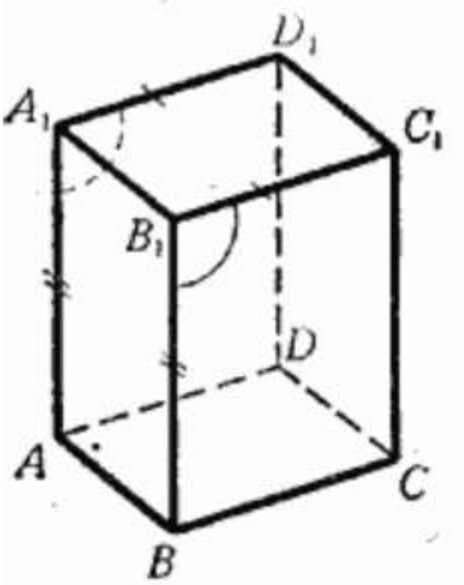


Рисунок 6 – чертеж к доказательству свойства 1

Доказательство 2

Возьмём какие-нибудь две диагонали, например, AC_1 и BD_1, и проведём вспомогательные прямые AD_1 и BC_1 (рис. 7).

Так как рёбра AB и D_1C_1 соответственно равны и параллельны ребру DC, то они равны и параллельны между собой; вследствие этого фигура AD_1C_1B есть параллелограмм, в котором прямые C_1A и BD_1 —диагонали, а в параллелограмме диагонали делятся в точке пересечения пополам.

Возьмём теперь одну из этих диагоналей, например, AC_1, с третьей диагональю, положим, с B_1D. Совершенно так же мы можем доказать, что они делятся в точке пересечения пополам. Следовательно, диагонали B_1D и AC_1 и диагонали AC_1 и BD_1(которые мы раньше брали) пересекаются в одной и той же точке, именно в середине диагонали AC_1. Наконец, взяв эту же диагональ AC_1 с четвёртой диагональю A_1C, мы также докажем, что они делятся пополам. Значит, точка пересечения и этой пары диагоналей лежит в середине диагонали AC_1. Таким образом, все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной и той же точке и делятся этой точкой пополам.

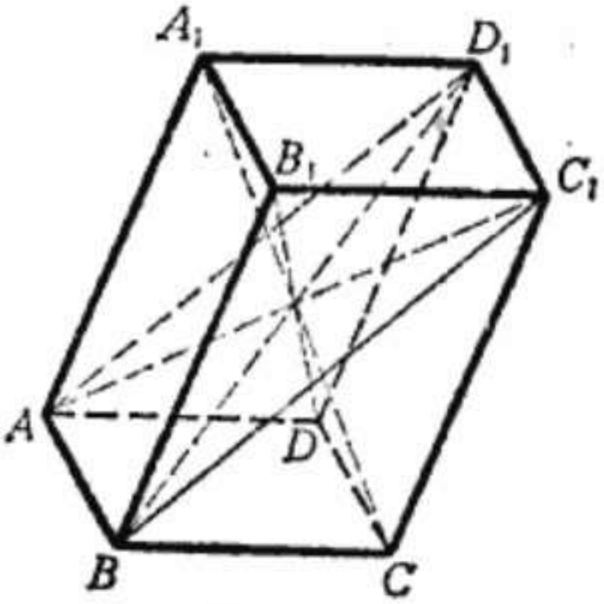


Рисунок 7 – чертеж к доказательству свойства 2

Задачи на построение сечений.

Определение. Сечением поверхности геометрических тел называется - плоская фигура, полученная в результате пересечения тела плоскостью и содержащая точки, принадлежащие как поверхности тела, так и секущей плоскости.

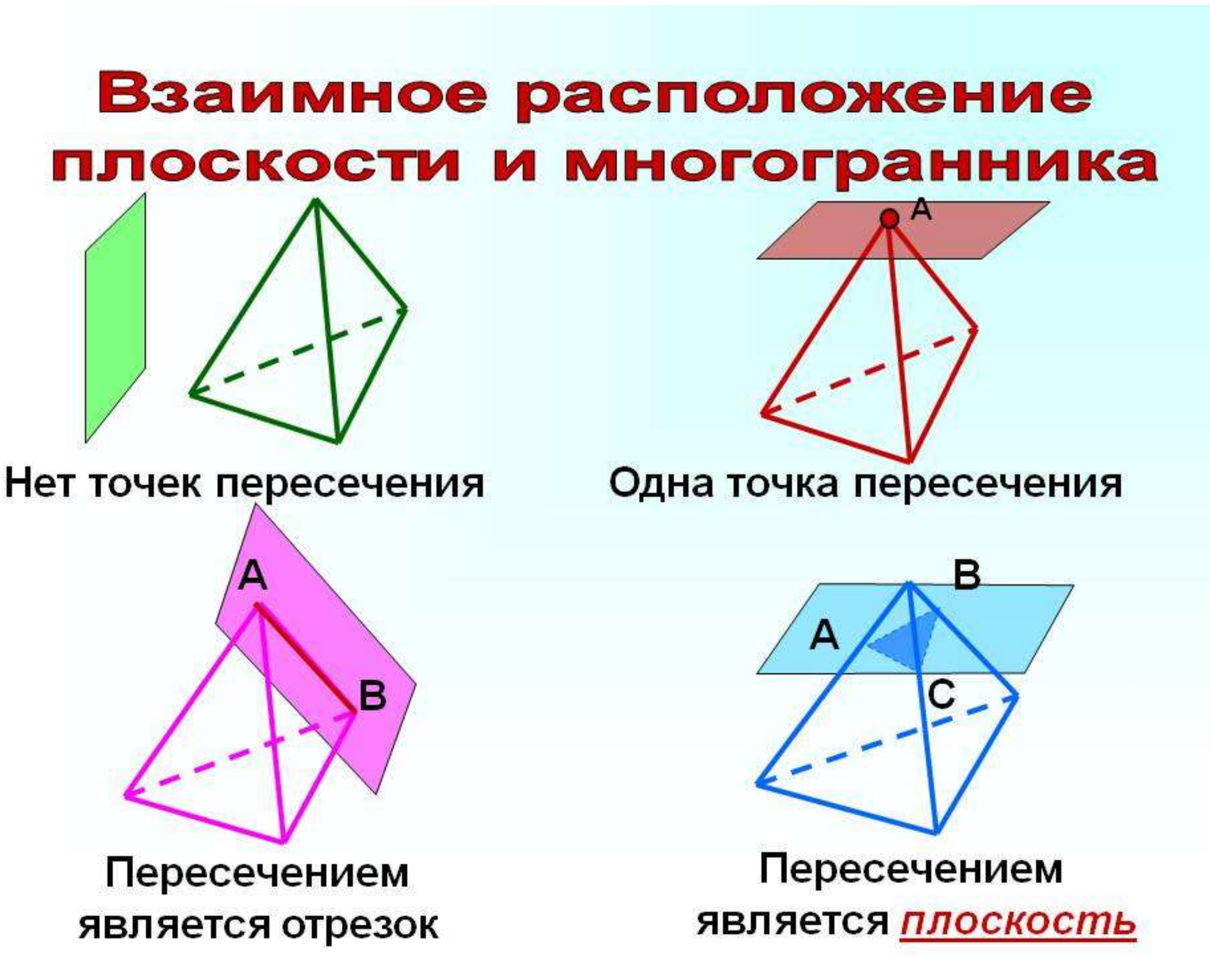
Взаимное расположение многогранника и секущей плоскости:

Многогранник и плоскость не имеют общих точек.

Многогранник и плоскость имеют одну общую точку-вершину многогранника.

Многогранник и плоскость имеют общую грань.

Многогранник и плоскость имеют общий отрезок-ребро многогранника.



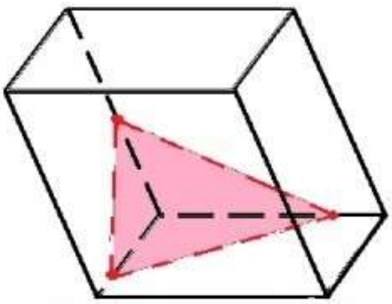
Виды сечений:
сечение параллельное плоскости основания,
диагональное сечение,
сечение, параллельное плоскости грани,
произвольное сечение.

Фигуры, которые получаются в результате сечения:

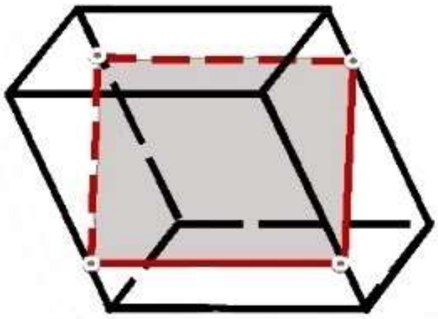
треугольник;
четырехугольник;
пятиугольник;
шестиугольник.

Виды сечений параллелепипеда

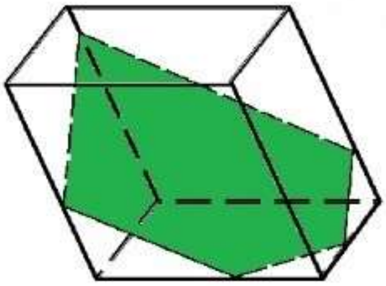
Сечение треугольник



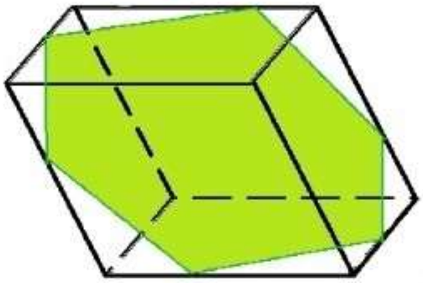
Сечение четырехугольник



Сечение пятиугольник



Сечение шестиугольник



Методы построения сечений

- Метод следа.

  В общем случае плоскость сечения имеет общую прямую с плоскостью каждой грани многогранника. Прямую, по которой секущая плоскость пересекает какую-либо грань называют следом секущей плоскости.

- Метод внутреннего проектирования.

  Этот метод удобен при построении сечений в тех случаях, когда почему-либо неудобно находить след секущей плоскости, например, след получается очень далеко от заданной фигуры. Используется метод параллельного проецирования.

- Комбинированный метод.

  При построении этим методом на каких-то этапах применяются приемы, изложенные в методе следов или методе внутреннего проектирования, а на других этапах применяются теоремы, изученные в разделе «Параллельность прямых и плоскостей».

Один из методов построения сечений, который мы рассмотрим- **метод следа.**

Рассмотрим метод следов, применяемый при построении сечений многогранников, а именно при построении сечения куба плоскостью.

Что такое метод следов? При построении сечений многогранников в качестве вспомогательной прямой часто используется **след секущей плоскости** (в плоскости грани, удобной для рассмотрения). Такой метод построения сечений называется **методом следа.**

Задача №1.

Построить сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки P, Q, R (рис. 8).

Решение.

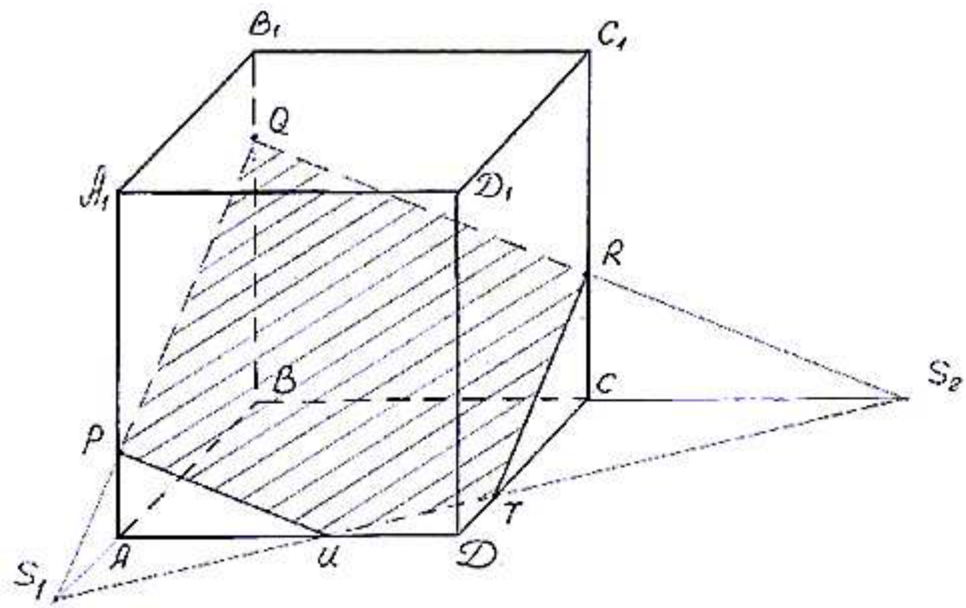


Рисунок 8 –чертеж к задаче №1

Построим след секущей плоскости на плоскость нижнего основания параллелепипеда. Рассмотрим грань AA_1B_1B. В этой грани лежат точки сечения P и Q. Проведем прямую PQ.

Продолжим прямую PQ, которая принадлежит сечению, до пересечения с прямой AB. Получим точку S_1, принадлежащую следу.

Аналогично получаем точку S_2 пересечением прямых QR и BC.

Прямая S_1S_2 - след секущей плоскости на плоскость нижнего основания параллелепипеда.

Прямая S_1S_2 пересекает сторону AD в точке U, сторону CD в точке T. Соединим точки P и U, так как они лежат в одной плоскости грани AA_1D_1D. Аналогично получаем TU и RT.

PQRTU – искомое сечение.

Основные правила построения сечений методом следа:

Если даны (или уже построены) две точки плоскости сечения на одной грани многогранника, то след сечения этой плоскости – прямая, проходящая через эти три точки.

Если дана (или уже построена) прямая пересечения плоскости сечения с основанием многогранника (след на основании) и есть точка, принадлежащая определенной боковой грани, то нужно определить точку пересечения данного следа с этой боковой гранью (точка пересечения данного следа с общей прямой основания и данной боковой грани)

Точку пересечения плоскости сечения с основанием можно определить как точку пересечения какой-либо прямой в плоскости сечения с ее проекцией на плоскость основания.

То есть, суть метода заключается в построении вспомогательной прямой, являющейся изображением линии пересечения секущей плоскости с плоскостью какой-либо грани фигуры. Удобнее всего строить изображение линии пересечения секущей плоскости с плоскостью нижнего основания. Используя след, легко построить изображения точек секущей плоскости, находящихся на боковых ребрах или гранях фигуры.

Задача №2.

Дан тетраэдр ABCD. Точка M – точка внутренняя, точка грани тетраэдра ABD. N – внутренняя точка отрезка DC. Построить точку пересечения прямой NM и плоскости ABC.

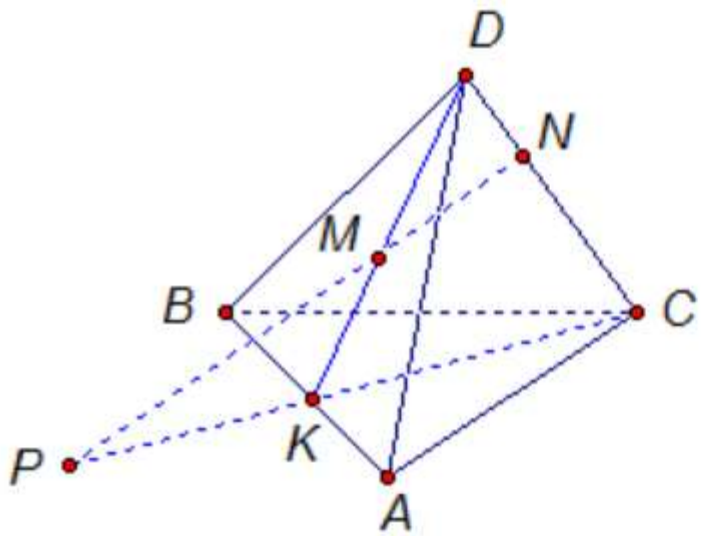


Рисунок 9 – чертеж к задаче №2

Решение:

Для решения построим вспомогательную плоскость DMN (рис. 10). Пусть прямая DM пересекает прямую AB в точке K. Тогда, CKD – это сечение плоскости DMN и тетраэдра. В плоскости DMN лежит и прямая NM, и полученная прямая CK. Значит, если NM не параллельна CK, то они пересекутся в некоторой точке P. Точка P и будет искомая точка пересечения прямой NM и плоскости ABC.

Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

Пример 1.

Дан тетраэдр ABCD. M – внутренняя точка грани ABD. P – внутренняя точка грани ABC. N – внутренняя точка ребра DC. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки M, N и P.

Решение:

Рассмотрим первый случай, когда прямая MN не параллельна плоскости ABC (рис. 11). В прошлой задаче мы нашли точку пересечения прямой MN и плоскости ABC. Это точка K, она получена с помощью вспомогательной плоскости DMN, т.е. мы проводим DM и получаем точку F. Проводим CF и на пересечении MN получаем точку K.

Проведем прямую KP. Прямая KP лежит и в плоскости сечения, и в плоскости ABC. Получаем точки P_1 и P_2. Соединяем P_1 и M и на продолжении получаем точку M_1. Соединяем точку P_2 и N. В результате получаем искомое сечение P1P2NM1. Задача в первом случае решена.

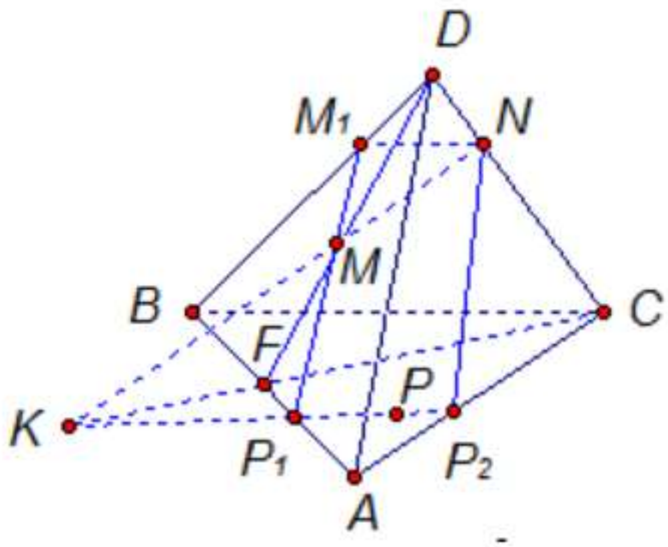


Рисунок 10 – чертеж к примеру 1 (первый случай)

Рассмотрим второй случай, когда прямая MN параллельна плоскости ABC (рис. 12). Плоскость MNP проходит через прямую MN параллельную плоскости ABC и пересекает плоскость ABC по некоторой прямой P_1P_2, тогда прямая P_1P_2 параллельна данной прямой MN.

Теперь проведем прямую P_1M и получим точку M_1. $P_1P_2NM_1$ – искомое сечение.

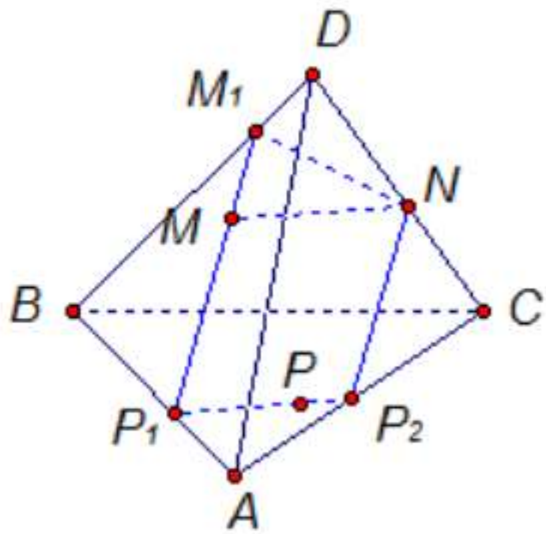


Рисунок 11 – чертеж к примеру 1 (второй случай)

Пример 2.

Через середины ребер AB и BC тетраэдра SABC проведена плоскость параллельно ребру SB. Докажите, что эта плоскость пересекает грани SAB и SBC по параллельным прямым.

Доказательство

Плоскость SBC и плоскость, проходящая через прямую MN параллельно ребру SB, пересекаются по прямой, проходящей через точку N (рис. 13). По теореме (о параллельных прямых) линия пересечения параллельна SB. В плоскость SBC через т. N проходит NQ||SB. Плоскость SAB и плоскость MNQ пересекаются по прямой, проходящей через т. M (прямая MP). По теореме (о параллельных прямых) линия пересечения параллельна SB.

$\begin{cases} PM || SB \\ NQ || SB \end{cases}$ следовательно, PM||NQ. Утверждение доказано.

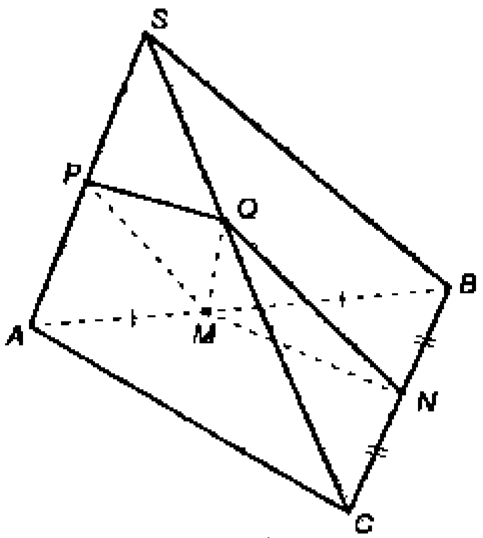


Рисунок 12 - чертеж к примеру 2

Домашнее задание

1. Записать основные определения и понятия по теме
2. Записать алгоритм построения сечения с помощью метода следа
3. Записать решение задач тренировочного модуля в тетрадь.